جامعة البعث　　الامتحان الفصلي الثاني 2016- 2015　　الاسم :

كلّيّة العلوم　قسم الرّياضيّات　　بنى جبريّة (3)　　المدّة : ساعة ونصف

السّؤال الأوّل (20) درجة:

ليكن المودول $M_n(\mathbb{R})$ ولتكن $U=\{A\in M_n(\mathbb{R}):A^t=A\}$. أثبت أن U مودول جزئي في المودول $M_n(\mathbb{R})$.

السّؤال الثّاني (30) درجة :

ننظر إلى Z كمودول على ذاتها والمطلوب:

١) أوجد $6Z+4Z \quad ; \quad 6Z\cap 4Z$.

٢) بين إن كان هذا المودول نيوثرياً أم أرتينياً ؟

٣) أثبت أن Z ليس مجموعاً مباشراً لمودولين جزئيين غير تافهين فيه.

السّؤال الثّالث(20) درجة :

نفرض أن $f\in Hom_R(M,N)$ و $g\in Hom_R(N,C)$ ، والمطلوب:

١) أثبت أن: $gf\in Hom_R(M,C)$.

٢) أثبت أن: $Ker(gf)=f^{-1}(Ker\,g)$.

السّؤال الرابع (30) درجة :

ليكن $f\in Hom_R(M,N)$ وليكن U مودولاً جزئياً في المودول M ، والمطلوب:

١) أثبت أن المتتالية $0\longrightarrow U\xrightarrow{i}M\xrightarrow{\pi}(M/U)\longrightarrow 0$ ، تامة.

٢) أثبت أن: $f^{-1}(f(U))=U+Kerf$ ، واستنتج أنه إذا كان f متبايناً فإن: $f^{-1}(f(U))=U$.

٣) إذا كان M بسيطاً فأثبت أن f الهومومورفيزم الصفري أو أنه متباين.

د.ياسين خلوف　　٢٠١٦/٦/٢٧

سلم تصحيح مقرر بنى جبرية (٢) - الفصل الثاني ٢٠١٥-٢٠١٦ . د. ياسين مقرونات

رياضيات سنة ٤

السؤال الأول (٢٠)

• $O_n \in U \Rightarrow U \neq \Phi$. $\forall A,B \in U : (A-B)^t = A^t - B^t = A - B \Rightarrow A-B \in U$

• $\forall \alpha \in R ; \forall A \in U : (\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A \Rightarrow \alpha A \in U$

مما سبق ينتج أن U مودول جزئي في $M_n(R)$.

السؤال الثاني (٣٠)

1) المجموع هو القاسم المشترك الأعظم للمولدين : $6Z + 4Z = 2Z$

التقاطع = المضاعف المشترك الأصغر : $6Z \cap 4Z = 12Z$

2) إن جميع المودولات الجزئية في Z هي من الشكل mZ ولدينا :

$Z \supset mZ \supset m^2Z \supset \dots \supset \dots$

ولدينا متتالية متناقصة لا تتوقف عن التناقص وبالتالي Z ليس آرتينياً .

بينما إذا كان p عدداً أولياً فإن pZ غير محتوى في أي مودول جزئي غير نفسه أو Z، حيث إذا كان $pZ \subset nZ$ لوجدنا أن $n | p$ ومنه $n = \pm 1$ أو $n = \pm p$. وإذن pZ عظمي في Z . وبالتالي Z نوتري .

3) لا يتقاطع أي مودولين جزئيين في Z لأن المودول الجزئي المولد بالمضاعف المشترك لن يكون صفرياً إذا كان $m \neq 0$ و $n \neq 0$ فإن $mZ \cap nZ = sZ \neq 0$ حيث $s = l.c.m(m,n)$ ومنه لا يمكن أن يكون $Z = mZ \oplus nZ$

السؤال الثالث (٢٠)

1) $gf : M \to C$

$x \mapsto (gf)(x) = g(f(x))$

$\forall \alpha, \beta \in R ; \forall x,y \in M :$

$(gf)[\alpha x + \beta y] = g[f(\alpha x + \beta y)] = g[\alpha f(x) + \beta f(y)] =$

$= \alpha g(f(x)) + \beta g(f(y)) = \alpha (gf)(x) + \beta (gf)(y)$

إذن $gf \in Hom_R(M, C)$

2) $\forall x \in M : x \in Ker(gf) \Leftrightarrow (gf)(x) = 0 \Leftrightarrow g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow$

$f(x) \in Ker g \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Ker g)$

إذن $Ker(gf) = f^{-1}(Ker g)$

(30 درجة)

1) تكون المتتالية تامة إذا كانت كل متتالية جزئية تامة، ولذلك فإن

المتتالية : $0 \to U \xrightarrow{i} M$ تامة لأن i متباين

: $U \to M \to M/U$ تامة لأن $\operatorname{Im} i = \ker \pi$

: $M \xrightarrow{\pi} M/U \to 0$ تامة لأن π غامر

إذن المتتالية المعطاة تامة.

(2

$\cdot\ \forall a \in f^{-1}(f(U)) \Rightarrow f(a) \in f(U) \Rightarrow \exists u \in U : f(a) = f(u) \Rightarrow$

$f(a-u) = 0 \Rightarrow (a-u) \in \ker f \Rightarrow \exists a' \in \ker f : a' = a-u \Rightarrow$

$a = u + a' \in U + \ker f \Rightarrow \boxed{f^{-1}(f(U)) \subseteq U + \ker f}$

$\cdot\ \forall u + k \in U + \ker f \Rightarrow f(u+k) = f(u) + f(k) = f(u) + 0 = f(u) \in f(U)$

$u \in U ; k \in \ker f$

ومنه $u + k \in f^{-1}(f(U))$

وإذن $\boxed{U + \ker f \subseteq f^{-1}(f(U))}$

ومن المتراجحتين تتم المساواة.

وإذا كان f متباينا فإن $\ker f = \{0\}$ وعندئذ $U + \ker f = U$

3) إذا كان M بسيطاً فإن أي مودول جزئي هو الصفر أو M نفسه وبما أن $\ker f$ مودول جزئي في M فإن $\ker f = \{0\}$ وهذا يؤدي إلى أن f متباين أو أن $\ker f = M$ هذا يؤدي إلى أن f التشاكل الصفري.

إذا حل الطالب بأية طريقة أخرى صحيحة تعطى له الدرجات بما يكافئ هذا السلم.